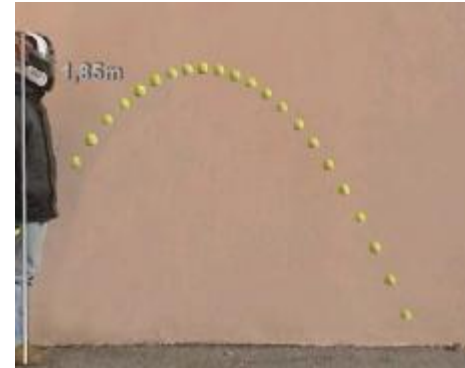


# Mouvement horizontales

# الحركات المستوية



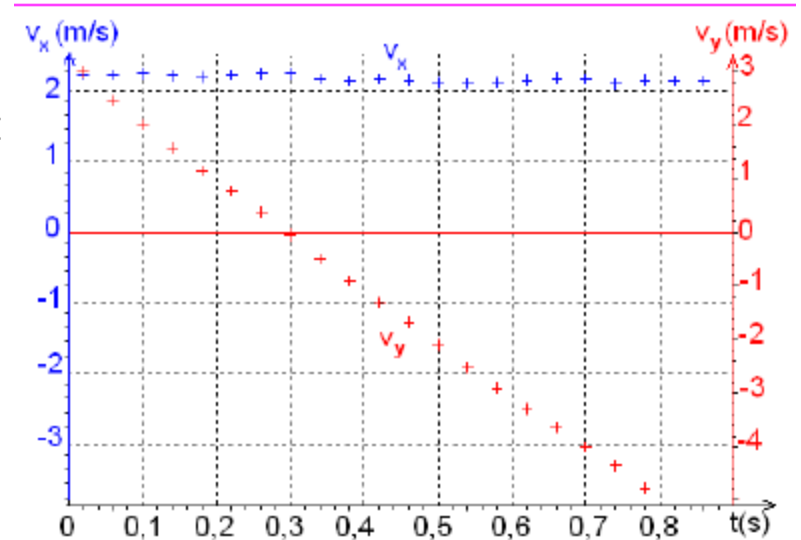
## 1) Etude expérimentale

On envoie une balle avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$

L'étude des photos obtenues par une caméra numérique nous donne la courbe ci dessous

### Vitesse

- sur Ox  $v_x = 2,2 \text{ m/s}$
- sur Oy  $v_y = -10t + 3$
- mouvement uniforme suivant Ox et uniformément varié suivant oy



### Accélération

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -10 \text{ m/s}^2$$

Donc

$$\vec{a}_G = -10\vec{j}$$



$$\vec{a}_G \approx \vec{g}$$

### ➤ Equations horaires du mouvement

$$v_x = 2,2 \text{ m/s} \longrightarrow x = 2,2 t \quad (\text{en prenant } x_0 = 0)$$

$$v_y = -10t + 3 \longrightarrow y = -5t^2 + 3t \quad (\text{en prenant } y_0 = 0)$$

### ➤ Equation de la trajectoire

En éliminant t entre les deux équations précédentes on a

$$y = -x^2 + 1,4 x$$

### Mouvement parabolique

#### 2) Etude théorique

Repère d'étude  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'origine  
Confondu avec le lieu d'envoi du projectile

On prend l'origine des temps l'instant de l'envoi

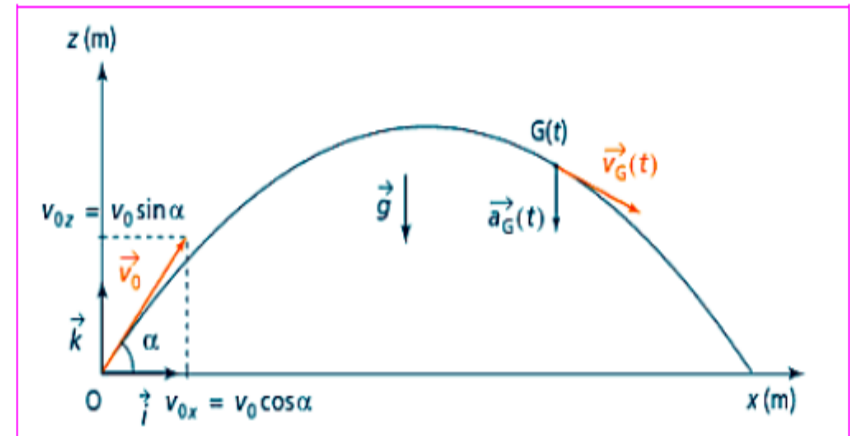
❖ Système étudié : projectile

❖ forces appliquées :  $\vec{P} = m\vec{g}$

❖ Deuxième loi de Newton  $m\vec{g} = m\vec{a}_G$



$$\vec{a}_G = \vec{g}$$



Projetons cette relation sur les axes Ox et Oz

### Sur Ox

$$a_x = \ddot{x} = 0 \longrightarrow v_x = \text{constante} = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \longrightarrow x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$$

### Sur Oz

$$a_z = \ddot{z} = -g \longrightarrow v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$



Mouvement uniforme suivant Ox

Mouvement uniformément varié suivant Oz

### 3) Equation de la trajectoire

En éliminant le temps on obtient

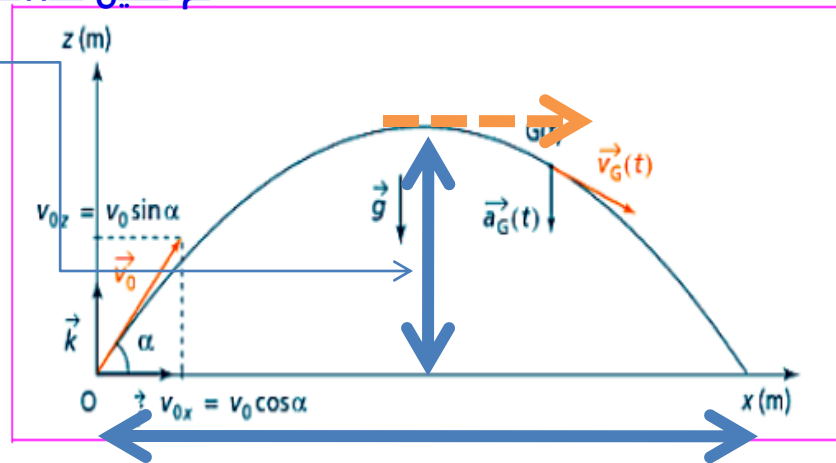
$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x$$

Deux positions caractéristiques

## La portée verticale

C'est la hauteur maximale atteinte par le projectile.  
En ce point la vitesse du projectile est horizontale

Donc  $v_z=0 \longrightarrow v_z = -gt + v_0 \sin \alpha = 0$



On déduit donc le temps  $t_S$  où le projectile atteint ce point  $t_S = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

En utilisant l'équation de  $z(t_S) = h$  on obtient

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha$$

## La portée horizontale

C'est la distance  $d$  qui sépare l'origine du point de chute du projectile. Elle est définie par  $d = z = 0$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + (\tan \alpha) \cdot x = 0 \longrightarrow d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

N.P  $d$  est max si  $\sin 2\alpha = 1$  soit  $\alpha = 45^\circ$

# Exercice

Le jeu schématisé ci-dessous consiste à lancer un boulet sur un plan incliné de telle façon qu'il atteigne la cible.

Le boulet est tout d'abord lâché en  $A$  sans vitesse initiale.

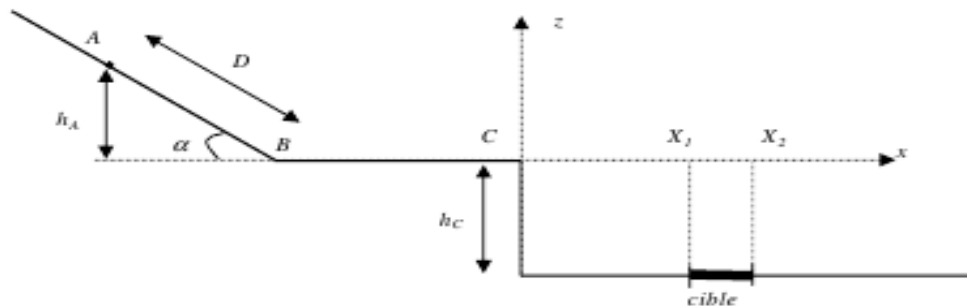
Le système étudié est le boulet que l'on assimile à un point.

Toute l'étude est dans un référentiel galiléen.

On néglige les frottements dans tout l'exercice.

Données :

$$\begin{aligned}\alpha &= 30^\circ \\ D &= AB = 0,50 \text{ m} \\ L &= BC = 0,20 \text{ m} \\ h_C &= 0,40 \text{ m} \\ m &= 10 \text{ g} \\ g &= 9,8 \text{ m.s}^{-2}\end{aligned}$$



## 1. ÉTUDE DU MOUVEMENT DU BOULET ENTRE A ET B.

1.1. Le système étudié est le boulet une fois lâché en  $A$ .

Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur le boulet. Représenter ces forces sur un schéma sans considération d'échelle.

1.2. On choisit l'altitude du point  $C$  comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur :  $E_{pp} = 0$  pour  $z_C = 0$ .

1.2.1. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur au point  $A$  et vérifier qu'elle vaut  $E_{pp}(A) = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .

1.2.2. En déduire l'expression puis la valeur de l'énergie mécanique du système au point  $A$ .

1.2.3. En déduire la valeur de l'énergie mécanique du système au point  $B$ . Justifier la réponse.

1.3. Montrer que l'expression de la vitesse au point  $B$  est :  $v_B = \sqrt{2g \cdot D \cdot \sin \alpha}$

## 2. ÉTUDE DE LA CHUTE DU BOULET APRÈS LE POINT C.

On étudie le mouvement du centre d'inertie  $G$  du boulet après le point  $C$ .

L'origine des temps est prise lorsque le boulet est en  $C$ .

Le mouvement étant rectiligne et uniforme entre  $B$  et  $C$ , la vitesse en  $C$  est la même qu'en  $B$  :

$$v_C = v_B = 2,2 \text{ m.s}^{-1}$$

**2.1.** On précise que l'action de l'air est négligée.

**2.1.1.** Énoncer la deuxième loi de Newton.

**2.1.2.** Appliquer cette loi au boulet une fois qu'il a quitté le point  $C$ .

**2.1.3.** Déterminer l'expression des composantes du vecteur accélération en projetant la deuxième loi de Newton dans le repère  $Cxz$  (voir figure).

**2.2.** On rappelle que la valeur de la vitesse au point  $C$  est  $v_C = 2,2 \text{ m.s}^{-1}$  et on précise que le vecteur vitesse au point  $C$  a une direction horizontale.

**2.2.1.** Déterminer l'expression des composantes du vecteur vitesse dans le repère  $Cxz$ .

L'expression des composantes du vecteur position dans le repère  $Cxz$  est :

$$\overrightarrow{CG} \begin{cases} x = (\sqrt{2g \cdot D \cdot \sin \alpha}) \cdot t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

**2.2.2.** En déduire l'équation de la trajectoire donnant l'expression de  $z$  en fonction de  $x$ .

**2.3.** On veut déterminer si le boulet atteint la cible  $E$  dont l'abscisse est comprise entre  $X_1 = 0,55 \text{ m}$  et  $X_2 = 0,60 \text{ m}$ .

**2.3.1.** Calculer le temps nécessaire pour que le boulet atteigne le sol.

**2.3.2.** En déduire l'abscisse  $X_f$  du boulet quand il touche le sol. La cible est-elle atteinte ?

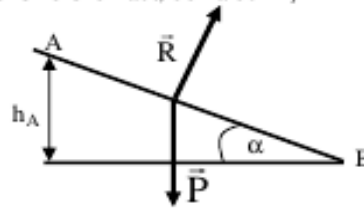
**2.4.** Quelle distance  $D$  faudrait-il choisir pour atteindre la cible à l'abscisse  $X_f = 0,57 \text{ m}$  ? (la durée de chute étant la même).

## 1. ÉTUDE DU MOUVEMENT DU BOULET ENTRAÎNÉ

1.1. On étudie le système **boulet** dans un référentiel **terrestre**, supposé **galiléen**.

Le boulet est soumis : à son **pooids**  $\vec{P}$  (de direction verticale, sens vers le bas, de valeur  $P = m.g$ )

à la **réaction**  $\vec{R}$  du plan incliné (de direction perpendiculaire au plan car les frottements sont négligés, sens vers le haut, de valeur  $R$ ).



1.2.1.  $E_{pp}(A) = m.g.h_A$  et  $h_A = D.\sin\alpha$  d'après la figure fournie

$$E_{pp}(A) = m.g.D.\sin\alpha$$

$$E_{pp}(A) = 0,010 \times 9,8 \times 0,50 \times \sin 30 = 2,5 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

1.2.2.  $E_m(A) = E_{pp}(A) + E_c(A)$  et la vitesse au point A est nulle donc  $E_c(A) = 0 \text{ J}$

$$E_m(A) = E_{pp}(A)$$

$$E_m(A) = 2,5 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

1.2.3. Les frottements étant négligés au cours du mouvement l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m(B) = E_m(A)$$

$$E_m(B) = 2,5 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

1.3.  $E_m(B) = E_m(A)$

$$\frac{1}{2} m.v_B^2 + m.g.z_B = \frac{1}{2} m.v_A^2 + m.g.z_A$$

avec  $z_B = 0 \text{ m}$ ,  $v_A = 0 \text{ m.s}^{-1}$  et  $z_A = h_A$

on obtient  $\frac{1}{2} m.v_B^2 = m.g.h_A = m.g.D.\sin\alpha$

soit  $\frac{1}{2} .v_B^2 = g.D.\sin\alpha$

$$v_B^2 = 2g.D.\sin\alpha$$

$$\text{D'où } v_B = \sqrt{2g.D.\sin\alpha}$$

## 2. ÉTUDE DE LA CHUTE DU BOULET APRES LE POINT C.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du boulet après le point C.

L'origine des temps est prise lorsque le boulet est en C.

Le mouvement étant rectiligne et uniforme entre B et C, la vitesse en C est la même qu'en B :  $v_C = v_B = 2,2 \text{ m.s}^{-1}$

2.1. L'action de l'air est négligée.

2.1.1. Deuxième loi de Newton: Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de la masse du système par son accélération :  $\sum \vec{F}_{ext.} = m.\vec{a}$

2.1.2. L'action de l'air étant négligée (ainsi que la poussée d'Archimède) seul le poids est appliqué au boulet  $\sum \vec{F}_{ext.} = \vec{P} = m.\vec{g}$  donc  $m.\vec{g} = m.\vec{a}$   $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

2.1.3. Compte tenu du repère Cxz choisi on a :  $\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$

2.2.1. À chaque instant :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  donc  $a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$  et  $a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$  donc en intégrant :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}(0) = \vec{v}_c$  :  $\vec{v}_c \begin{cases} v_{cx} = v_c = v_0 \\ v_{cz} = 0 \end{cases}$  alors  $\begin{cases} Cte_1 = v_0 \\ Cte_2 = 0 \end{cases}$

Finalement  $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_z(t) = -g.t \end{cases}$

2.2.2 On donne:  $\overline{CG} \begin{cases} x = (\sqrt{2g.D.\sin\alpha}) \cdot t \\ z = -\frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$

on isole t de l'expression de x :  $t = \frac{x}{\sqrt{2g.D.\sin\alpha}}$

on reporte dans z :  $z(x) = -\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{2g.D.\sin\alpha}$

$z(x) = -\frac{x^2}{4.D.\sin\alpha}$  équation de la trajectoire.

2.3.1. Lorsque le boulet atteint le sol :  $z = -h_c$  donc de l'expression  $z = -\frac{1}{2}g.t^2$  il vient  $h_c = \frac{1}{2}g.t^2$

alors  $t = \sqrt{\frac{2.h_c}{g}}$

$t = \sqrt{\frac{2 \times 0,40}{9,8}} = 0,29 \text{ s}$

2.3.2. Quand le boulet touche le sol :  $x = X_1$  et  $z = -h_c$ .

Utilisons l'équation de la trajectoire  $z(x) = -\frac{x^2}{4.D.\sin\alpha}$  pour obtenir  $X_1$ .

$$h_c = \frac{X_1^2}{4.D.\sin\alpha}$$

$$X_1^2 = 4.D.h_c.\sin\alpha$$

$$X_1 = 2 \cdot \sqrt{D.h_c.\sin\alpha} \quad (\text{on ne retient pas la solution } X_1 = -2 \cdot \sqrt{D.h_c.\sin\alpha})$$

$$X_1 = 2 \times \sqrt{0,50 \times 0,40 \times \sin 30} = 0,63 \text{ m}$$

$X_1$  n'est pas compris entre  $X_1 = 0,55 \text{ m}$  et  $X_2 = 0,60 \text{ m}$  donc le boulet n'atteint pas la cible.

2.4. On repart de l'expression  $h_c = \frac{X_1^2}{4.D.\sin\alpha}$  et on isole D.

$$D = \frac{X_1^2}{4.h_c.\sin\alpha}$$

$$D = \frac{0,57^2}{4 \times 0,40 \times \sin 30} = 0,41 \text{ m}$$

La valeur de D obtenue est inférieure à la valeur initiale 0,50 m ce qui est cohérent pour que le boulet atteigne la cible.